第４講　整数の性質

1　$a=407$，$b=481$ とする。

(1)　a と b の最大公約数は **アイ** であり，最小公倍数は **ウエオカ** である。

$\sqrt{abc}$ が整数となる正の整数 c の中で，最小のものは **キクケ** である。

(2)　a と b の最大公約数が アイ であることに注意すると，不定方程式

$$ax=-by$$

の整数解は，$x=$ **コサシ** k，$y=$ **スセ** k（k は整数）である。

(3)　不定方程式 $ax+by=40700$ を満たす 0 以上の整数 x，y の組は **ソ** 組あり，その中で x が最も小さいものは $x=$ **タ**，$y=$ **チツ** である。

2　不定方程式

$$92x+197y=1$$

をみたす整数 x，y の組の中で，x の絶対値が最小のものは

$x=$ **アイ** ，　$y=$ **ウエ**

である。不定方程式

$$92x+197y=10$$

をみたす整数 x，y の組の中で，x の絶対値が最小のものは

$x=$ **オカキ** ，　$y=$ **クケ**

である。

第４講　整数の性質

1 (1) 互除法により，

$481=407\times1+74$

$407=74\times5+37$

$74=37\times2$

したがって，a と b の最大公約数は **37**

この結果より，$a=407=37\times11$，$b=481=37\times13$ と表すことができる．

よって，a と b の最小公倍数は，$37\times11\times13=\mathbf{5291}$

$\sqrt{abc}=\sqrt{37^2\times11\times13\times c}$ が整数となる正の整数 c のうち，最小のものは，

$11\times13=\mathbf{143}$

(2) $ax=-by$，つまり $37\times11\times x=-37\times13\times y$ より，$11x=-13y$

x，y が整数のとき，11 と 13 は互いに素より，y は 11 の倍数．

よって，$y=11k$（k は整数）と表される．

このとき，$11x=-13\times11k$ より，$x=-13k$ と表される．

したがって，$x=\mathbf{-13}k$，$y=\mathbf{11}k$（k は整数）

(3) $ax+by=40700$，つまり $407x+481y=407\times100$ …①より，

この方程式を満たす整数解の 1 つは $x=100$，$y=0$ である．

よって，$407\times100+481\times0=407\times100$ …②

①－②より，$407(x-100)+481y=0$，つまり $a(x-100)=-by$ と表される．

よって，(2)の結果より，$x-100=-13k$，$y=11k$，つまり

$x=100-13k$，$y=11k$（k は整数）

と表される．

$x\geqq0$ より，$100-13k\geqq0$　よって，$k\leqq7$　　$y\geqq0$ より，$11k\geqq0$　よって，$k\geqq0$

したがって，$0\leqq k\leqq7$ より，これを満たす整数 k は 8 個であるから，0 以上の整数 x，y の組は **8** 組

このうち，x が最も小さいのは $k=7$ のときで，このとき $x=\mathbf{9}$，$y=\mathbf{77}$

2 互除法により，$197=92\times2+13$ …①

$92=13\times7+1$ …②

よって，197 と 92 の最大公約数は 1 である．

①より，$13=197-92\times2$ …①′　　②より，$1=92-13\times7$ …②′

②′ に①′ を代入して，$1=92-(197-92\times2)\times7$

$=92-197\times7+92\times14$

$=92\times15-197\times7$

よって，$92\times15+197\times(-7)=1$ …③

これは，方程式 $92x+197y=1$ …④の解の 1 つが $x=15$，$y=-7$ であることを表して

いる．

④－③より，$92(x-15)+197(y+7)=0$　　つまり，$92(x-15)=197(-y-7)$

92，197 は互いに素より，$x-15$ は 197 の倍数．

よって，$x-15=197k$（k は整数）と表される．

このとき，$92\times197k=197(-y-7)$ より，$92k=-y-7$

したがって，$x=197k+15$，$y=-92k-7$（k は整数）と表される．

この整数 x，y の組で，x の絶対値が最小のものは，$k=0$ のときの $x=\mathbf{15}$，$y=\mathbf{-7}$

また，③の両辺を 10 倍することにより，$92\times150+197\times(-70)=10$ …⑤

これは，方程式 $92x+197y=10$ …⑥の解の 1 つが $x=150$，$y=-70$ であることを表している．

⑥－⑤より，$92(x-150)=197(-y-70)$

よって，$x=197\ell+150$，$y=-92\ell-70$（ℓ は整数）と表される．

この整数 x，y の組で，x の絶対値が最小のものは，$\ell=-1$ のときの $x=\mathbf{-47}$，$y=\mathbf{22}$